

УТВЕРЖДАЮ:

Первый проректор-проректор по
учебной работе

Д.Е. Овчинников



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.02.02 «Вычислительная линейная алгебра»

Код и направление подготовки (специальность)	02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
Направленность (профиль)	Анализ данных в бизнес-аналитике
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная
Год начала подготовки	2026
Институт / факультет	Институт инженерно-экономического и гуманитарного образования
Выпускающая кафедра	кафедра "Высшая математика"
Кафедра-разработчик	кафедра "Высшая математика"
Объем дисциплины, ч. / з.е.	108 / 3
Форма контроля (промежуточная аттестация)	Зачет

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы	4
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся	5
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий	5
4.1 Содержание лекционных занятий	6
4.2 Содержание лабораторных занятий	7
4.3 Содержание практических занятий	7
4.4. Содержание самостоятельной работы	9
5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю)	10
6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения	10
7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем	10
8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)	10
9. Методические материалы	11
10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)	13

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Наименование категории (группы) компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции)
Общепрофессиональные компетенции			
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-2 Способен применять современный математический аппарат, связанный с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности	ОПК-2.1 Знать: вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем	Знать вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем; источники погрешностей в численных расчетах; методы регуляризации.
		ОПК-2.2 Уметь: реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов	Уметь реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов; выбирать оптимальный метод решения СЛАУ в зависимости от свойств матрицы системы.
		ОПК-2.3 Владеть: навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения	Владеть навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения; навыками профилирования и оценки вычислительной сложности алгоритмов.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы: **обязательная часть**

Код компетенции	Предшествующие дисциплины	Параллельно осваиваемые дисциплины	Последующие дисциплины
ОПК-2	Дискретная математика; Методы оптимизации и исследования операций	Методы оптимизации и исследования операций; Теория вероятностей; Теория графов	Вычислительная математика; Математическая статистика; Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы; Случайные процессы

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Вид учебной работы	Всего часов / часов в электронной форме	4 семестр часов / часов в электронной форме
Аудиторная контактная работа (всего), в том числе:	48	48
Лекции	16	16
Практические занятия	32	32
Внеаудиторная контактная работа, КСР	4	4
Самостоятельная работа (всего), в том числе:	20	20
выполнение задач, заданий, упражнений (в том числе разноуровневых)	16	16
выполнение кейс-заданий	4	4
Контроль	36	36
Итого: час	108	108
Итого: з.е.	3	3

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ раздела	Наименование раздела дисциплины	Виды учебной нагрузки и их трудоемкость, часы				
		ЛЗ	ЛР	ПЗ	СРС	Всего часов
1	Введение в вычислительную линейную алгебру и анализ ошибок	2	0	4	2	8
2	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	4	0	10	4	18

3	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	6	0	10	10	26
4	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	4	0	8	4	16
	КСР	0	0	0	0	4
	Контроль	0	0	0	0	36
	Итого	16	0	32	20	108

4.1 Содержание лекционных занятий

№ занятия	Наименование раздела	Тема лекции	Содержание лекции (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	Количество часов / часов в электронной форме
4 семестр				
1	Введение в вычислительную линейную алгебру и анализ ошибок	Особенности машинной арифметики	Представление чисел с плавающей запятой стандарта IEEE 754. Машинный эпсилон. Понятие абсолютной и относительной погрешности. Обратная задача анализа ошибок. Число обусловленности $\text{cond}(A)$ как мера чувствительности решения СЛАУ к возмущениям входных данных. Примеры плохо обусловленных матриц (матрица Гильберта).	2
2	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Теорема об LU-разложении. Алгоритмическая реализация метода Гаусса через факторизацию. Стратегии выбора ведущего элемента (Partial и Full pivoting) для обеспечения численной устойчивости. Блочное LU-разложение и его применение в современных высокопроизводительных библиотеках (LAPACK).	2
3	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Ортогональные преобразования	Преимущества ортогональных преобразований (сохранение евклидовой нормы). Отражения Хаусхолдера для приведения матрицы к хессенберговой или трапециевидной форме. Повороты Гивенса для обнуления отдельных элементов. Экономичное QR-разложение.	2
4	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Классические итерационные методы	Матричная запись методов Якоби, Гаусса-Зейделя и SOR (Successive Over-Relaxation). Теорема о сходимости стационарных итерационных методов (критерий спектрального радиуса). Оценка скорости сходимости.	2
5	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Метод сопряженных градиентов	A-сопряженность направлений. Геометрическая интерпретация метода как минимизации функции вдоль A-сопряженных направлений. Свойства конечной сходимости в точной арифметике. Причины потери ортогональности невязок.	2

6	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Предобуславливание	Проблема медленной сходимости для плохо обусловленных систем. Идея предобуславливания: решение эквивалентной системы $M^{-1}Ax = M^{-1}b$. Требования к предобуславливателю M . Практические примеры: неполный $ILU(0)$, диагональный предобуславливатель.	2
7	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	Метод наименьших квадратов	Постановка задачи МНК. Нормальные уравнения и их недостатки (возведение числа обусловленности в квадрат). Решение через QR-разложение и SVD. Псевдообратная матрица.	2
8	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	Методы регуляризации	Некорректность задачи МНК при наличии мультиколлинеарности. Ridge-регрессия как смещенная оценка с меньшей дисперсией. Байесовская интерпретация регуляризации. Проксимальные методы для задач с L1-штрафом (метод ISTA).	2
Итого за семестр:				16
Итого:				16

4.2 Содержание лабораторных занятий

Учебные занятия не реализуются.

4.3 Содержание практических занятий

№ занятия	Наименование раздела	Тема практического занятия	Содержание практического занятия (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	Количество часов / часов в электронной форме
4 семестр				
1	Введение в вычислительную линейную алгебру и анализ ошибок	Программирование базовых операций и оценка точности	Реализация функций сложения и умножения матриц. Расчет числа обусловленности для различных типов матриц средствами <code>numpy.linalg.cond</code> .	2
2	Введение в вычислительную линейную алгебру и анализ ошибок	Программирование базовых операций и оценка точности	Исследование накопления ошибки округления при решении СЛАУ с известной правой частью.	2
3	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Реализация прямого хода метода Гаусса	Программирование LU-разложения без выбора ведущего элемента.	2

4	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Реализация прямого хода метода Гаусса	Модификация алгоритма с частичным выбором главного элемента (partial pivoting). Использование готовых решателей из <code>scipy.linalg.lu</code> .	2
5	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Работа с QR-разложением и Хессенберговыми формами	Решение задачи МНК двумя способами: через нормальное уравнение и через QR-разложение (<code>scipy.linalg.lstsq</code>).	2
6	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Работа с QR-разложением и Хессенберговыми формами	Решение задачи МНК двумя способами: через нормальное уравнение и через QR-разложение (<code>scipy.linalg.lstsq</code>).	2
7	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Работа с QR-разложением и Хессенберговыми формами	Приведение симметричной матрицы к трехдиагональному виду преобразованиями Хаусхолдера.	2
8	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Программирование метода Якоби	Реализация итерационных схем. Экспериментальное исследование влияния числа обусловленности исходной матрицы на количество итераций до достижения заданной точности $\ r_k\ < \epsilon$.	2
9	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Программирование метода Зейделя	Реализация итерационных схем. Экспериментальное исследование влияния числа обусловленности исходной матрицы на количество итераций до достижения заданной точности $\ r_k\ < \epsilon$.	2
10	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Метод сопряженных градиентов	Реализация алгоритма CG. Генерация тестовых симметричных положительно определенных матриц (например, дискретизация оператора Лапласа). График сходимости (норма невязки от номера итерации).	2
11	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Метод сопряженных градиентов	Реализация алгоритма CG. Генерация тестовых симметричных положительно определенных матриц (например, дискретизация оператора Лапласа). График сходимости (норма невязки от номера итерации).	2
12	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Биортогонализация и предобуславливание	Изучение работы библиотеки <code>scipy.sparse.linalg.bicgstab</code> . Реализация простейшего диагонального предобуславливателя. Сравнительный анализ скорости сходимости CG и BiCGSTAB с предобуславливателем и без него для большой разреженной матрицы.	2

13	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	SVD и сжатие данных	Разложение изображения (матрицы пикселей) с помощью SVD.	2
14	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	SVD и сжатие данных	Реконструкция изображения с использованием только первых k сингулярных чисел. Иллюстрация теоремы Эккарта-Янга.	2
15	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	Регуляризованные регрессии	Применение <code>sklearn.linear_model.Ridge</code> и <code>Lasso</code> к реальному датасету. Подбор параметра регуляризации <code>alpha</code> с помощью кросс-валидации (скользящего контроля)	2
16	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	Регуляризованные регрессии	Применение <code>sklearn.linear_model.Ridge</code> и <code>Lasso</code> к реальному датасету. Подбор параметра регуляризации <code>alpha</code> с помощью кросс-валидации (скользящего контроля)	2
Итого за семестр:				32
Итого:				32

4.4. Содержание самостоятельной работы

Наименование раздела	Вид самостоятельной работы	Содержание самостоятельной работы (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	Количество часов
4 семестр			
Введение в вычислительную линейную алгебру и анализ ошибок	Подготовка к практическим работам	Написание программного кода "от руки" (псевдокод) перед занятием. Тестирование простых фрагментов скриптов.	2
Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	Подготовка к практическим работам	Написание программного кода "от руки" (псевдокод) перед занятием. Тестирование простых фрагментов скриптов.	4
Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	Подготовка к практическим работам	Написание программного кода "от руки" (псевдокод) перед занятием. Тестирование простых фрагментов скриптов.	10
Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	Выполнение индивидуального задания	Комплексная задача: Загрузка большого датасета -> Предобработка признаков -> Построение гребневой регрессии с кросс-валидацией -> Анализ вычислительной эффективности использованных библиотечных функций vs самописных аналогов.	4
Итого за семестр:			20
Итого:			20

5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю)

№ п/п	Библиографическое описание	Ресурс НТБ СамГТУ (ЭБС СамГТУ, IPRbooks и т.д.)
Основная литература		
1	Бахвалов, Н.С. Численные методы : Учеб.пособие / Н.С.Бахвалов,Н.П.Жидков,Г.М.Кобельников;МГУ им.М.В.Ломоносова . - 4-е изд..- М., БИНОМ.Лаб.знаний, 2006.- 636 с.	Книжный фонд
2	Голуб, Дж. Матричные вычисления : Пер.с англ. / Дж. Голуб, Л. Ч. Ван ; пер. Ю. М. Нечепуренко ; ред. В. В. Воеводин.- М., Мир, 1999.- 548 с.	Книжный фонд
Дополнительная литература		
3	Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра : Теория и приложения:Пер.с англ. / Дж. Деммель.- М., Мир, 2001.- 429 с.	Книжный фонд
4	Стренг, Г. Линейная алгебра и ее применения : Пер. с англ. / Под ред. Г.И.Марчука.- М., Мир, 1980.- 454 с.	Книжный фонд

Доступ обучающихся к ЭР НТБ СамГТУ (elib.samgtu.ru) осуществляется посредством электронной информационной образовательной среды университета и сайта НТБ СамГТУ по логину и паролю.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения

При проведении лекционных занятий используется мультимедийное оборудование.

Организовано взаимодействие обучающегося и преподавателя с использованием электронной ин-формационной образовательной среды университета.

№ п/п	Наименование	Производитель	Способ распространения
----------	--------------	---------------	---------------------------

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем

№ п/п	Наименование	Краткое описание	Режим доступа
----------	--------------	------------------	---------------

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Лекционные занятия

- аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук), программное обеспечение: MS Excel, MS Word);

- аудитория, оснащенная учебной мебелью: столы, стулья для обучающихся; стол, стул для преподавателя.

Практические занятия

- аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук), программное обеспечение: Python);
- аудитория, оснащенная учебной мебелью: столы, стулья для обучающихся; стол, стул для преподавателя.

Самостоятельная работа

- компьютерный класс, оснащенный компьютерами с доступом в Интернет и обеспечивающие доступ в электронно-информационную образовательную среду СамГТУ читальный зал НТБ СамГТУ (ауд. 200 корпус №8; ауд. 125 корпус № 1; ауд. 41, 31, 34, 35
Главный корпус библиотеки; ауд. 83а, 414, 416, 0209 12 корпус; ауд. 401 корпус №10);
- пакеты ПО общего назначения (MS Excel, MS Word);
 - пакет прикладных программ (Python);
- материально-техническое обеспечение НТБ СамГТУ;
- ресурсы УИТ СамГТУ.

9. Методические материалы

Методические рекомендации при работе на лекции

До лекции студент должен просмотреть учебно-методическую и научную литературу по теме лекции с тем, чтобы иметь представление о проблемах, которые будут разбираться в лекции.

Перед началом лекции обучающимся сообщается тема лекции, план, вопросы, подлежащие рассмотрению, доводятся основные литературные источники. Весь учебный материал, сообщаемый преподавателем, должен не просто прослушиваться. Он должен быть активно воспринят, т.е. услышан, осмыслен, понят, зафиксирован на бумаге и закреплён в памяти. Приступая к слушанию нового учебного материала, полезно мысленно установить его связь с ранее изученным. Следя за техникой чтения лекции (акцент на существенном, повышение тона, изменение ритма, пауза и т.п.), необходимо вслед за преподавателем уметь выделять основные категории, законы и определять их содержание, проблемы, предполагать их возможные решения, доказательства и выводы. Осуществляя такую работу, можно значительно облегчить себе понимание учебного материала, его конспектирование и дальнейшее изучение.

Конспектирование лекции позволяет обработать, систематизировать и лучше сохранить полученную информацию с тем, чтобы в будущем можно было восстановить в памяти основные, содержательные моменты. Типичная ошибка, совершаемая обучающимся, дословное конспектирование речи преподавателя. Как правило, при записи «слово в слово» не остается времени на обдумывание, анализ и синтез информации. Отбирая нужную информацию, главные мысли, проблемы, решения и выводы, необходимо сокращать текст, строить его таким образом, чтобы потом можно было легко в нем разобраться. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых можно будет делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. С окончанием лекции работа над конспектом не может считаться завершённой. Нужно еще восстановить отдельные места, проверить, все ли понятно, уточнить что-то на консультации и т.п. с тем, чтобы конспект мог быть использован в процессе подготовки к практическим занятиям, зачету, экзамену. Конспект лекции – незаменимый учебный документ, необходимый для самостоятельной работы.

Методические рекомендации при подготовке и работе на практическом занятии

Практические занятия по дисциплине проводятся в целях выработки практических умений и приобретения навыков в решении профессиональных задач.

Рекомендуется следующая схема подготовки к практическому занятию:

1. ознакомление с планом практического занятия, который отражает содержание предложенной темы;
2. проработка конспекта лекции;
3. чтение рекомендованной литературы;
4. подготовка ответов на вопросы плана практического занятия;
5. выполнение тестовых заданий, задач и др.

Подготовка обучающегося к практическому занятию производится по вопросам, разработанным для каждой темы практических занятий и (или) лекций. В процессе подготовки к практическим занятиям, необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной литературы.

Работа студентов во время практического занятия осуществляется на основе заданий, которые выдаются обучающимся в начале или во время занятия. На практических занятиях приветствуется активное участие в обсуждении конкретных ситуаций, способность на основе полученных знаний находить наиболее эффективные решения поставленных проблем, уметь находить полезный дополнительный материал по тематике занятий. Обучающимся необходимо обращать внимание на основные понятия, алгоритмы, определять практическую значимость рассматриваемых вопросов. На практических занятиях обучающиеся должны уметь выполнить расчет по заданным параметрам или выработать определенные решения по обозначенной проблеме. Задания могут быть групповые и индивидуальные. В зависимости от сложности предлагаемых заданий, целей занятия, общей подготовки обучающихся преподаватель может подсказать обучающимся алгоритм решения или первое действие, или указать общее направление рассуждений. Полученные результаты обсуждаются с позиций их адекватности или эффективности в рассмотренной ситуации.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы

Организация самостоятельной работы обучающихся ориентируется на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей, переход от поточного к индивидуализированному обучению с учетом потребностей и возможностей обучающегося.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета является наиболее эффективным методом получения дополнительных знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала. Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса.

Самостоятельная работа реализуется:

- непосредственно в процессе аудиторных занятий;
- на лекциях, практических занятиях;
- в контакте с преподавателем вне рамок расписания;
- на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.;
- в библиотеке, дома, на кафедре при выполнении обучающимся учебных и практических задач.

Эффективным средством осуществления обучающимся самостоятельной работы является электронная информационно-образовательная среда университета, которая обеспечивает доступ к учебным планам, рабочим программам дисциплин (модулей), практик, к изданиям электронных библиотечных систем.

10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств представлен в приложении № 1.

**Фонд оценочных средств
по дисциплине
Б1.О.02.02 «Вычислительная линейная алгебра»**

Код и направление подготовки (специальность)	02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
Направленность (профиль)	Анализ данных в бизнес-аналитике
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная
Год начала подготовки	2026
Институт / факультет	Институт инженерно-экономического и гуманитарного образования
Выпускающая кафедра	кафедра "Высшая математика"
Кафедра-разработчик	кафедра "Высшая математика"
Объем дисциплины, ч. / з.е.	108 / 3
Форма контроля (промежуточная аттестация)	Зачет

**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю),
соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной
программы**

Наименование категории (группы) компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции)
Общепрофессиональные компетенции			
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-2 Способен применять современный математический аппарат, связанный с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности	ОПК-2.1 Знать: вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем	Знать вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем; источники погрешностей в численных расчетах; методы регуляризации.
		ОПК-2.2 Уметь: реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов	Уметь реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов; выбирать оптимальный метод решения СЛАУ в зависимости от свойств матрицы системы.
		ОПК-2.3 Владеть: навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения	Владеть навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения; навыками профилирования и оценки вычислительной сложности алгоритмов.

Матрица соответствия оценочных средств запланированным результатам обучения

Код индикатора достижения компетенции	Результаты обучения	Оценочные средства	Текущий контроль успеваемости	Промежуточная аттестация
Введение в вычислительную линейную алгебру и анализ ошибок				
ОПК-2.1 Знать: вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем	Знать вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем; источники погрешностей в численных расчетах; методы регуляризации.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.2 Уметь: реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов	Уметь реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов; выбирать оптимальный метод решения СЛАУ в зависимости от свойств матрицы системы.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.3 Владеть: навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения	Владеть навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения; навыками профилирования и оценки вычислительной сложности алгоритмов.	подготовка к зачету	Да	Да
Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)				
ОПК-2.1 Знать: вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем	Знать вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем; источники погрешностей в численных расчетах; методы регуляризации.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.2 Уметь: реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов	Уметь реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов; выбирать оптимальный метод решения СЛАУ в зависимости от свойств матрицы системы.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.3 Владеть: навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения	Владеть навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения; навыками профилирования и оценки вычислительной сложности алгоритмов.	подготовка к зачету	Да	Да
Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений				

ОПК-2.1 Знать: вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем	Знать вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем; источники погрешностей в численных расчетах; методы регуляризации.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.2 Уметь: реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов	Уметь реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов; выбирать оптимальный метод решения СЛАУ в зависимости от свойств матрицы системы.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.3 Владеть: навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения	Владеть навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения; навыками профилирования и оценки вычислительной сложности алгоритмов.	подготовка к зачету	Да	Да
Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры				
ОПК-2.1 Знать: вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем	Знать вычислительные алгоритмы оптимизации и численные методы решения больших линейных систем; источники погрешностей в численных расчетах; методы регуляризации.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.2 Уметь: реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов	Уметь реализовывать различные математические модели (в том числе регрессионные) в виде вычислительных алгоритмов; выбирать оптимальный метод решения СЛАУ в зависимости от свойств матрицы системы.	подготовка к зачету	Да	Да
ОПК-2.3 Владеть: навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения	Владеть навыками скользящего контроля алгоритма, настроенного на обучающей выборке, и навыками регуляризации алгоритма для предотвращения его переобучения; навыками профилирования и оценки вычислительной сложности алгоритмов.	подготовка к зачету	Да	Да

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций в ходе освоения образовательной программы

Формы текущего контроля успеваемости

Перечень, подлежащих оценке результатов обучения (показателей проявления компетенций: знаний, умений, владений) при использовании предусмотренных рабочей программой дисциплины оценочных средств, представлены в рабочей программе дисциплины в п.1. В рамках дисциплины предусмотрено выполнение самостоятельной работы: - выполнение контрольных работ; - выполнение задач, заданий, упражнений (в том числе разноуровневых) - подготовка к экзаменам. Рекомендуемая литература по изучаемым темам предлагается в п.5 рабочей программы. Для поиска материалов по темам студент использует учебники, дополнительную литературу, ресурсы сети интернет.

Методические указания по самостоятельной работе над изучаемым материалом и при подготовке к практическим занятиям

Начинать надо с изучения рекомендованной литературы. Необходимо помнить, что на лекции обычно рассматривается не весь материал, а только его часть. Остальная его часть восполняется в процессе самостоятельной работы. В связи с этим работа с рекомендованной литературой обязательна. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практического приложения рассматриваемых теоретических вопросов. В процессе этой работы необходимо стремиться понять и запомнить основные положения рассматриваемого материала, примеры, поясняющие его, а также разобраться в иллюстративном материале. Методические указания по выполнению задач, заданий, упражнений (в том числе разноуровневых) - индивидуальных домашних заданий Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) – набор задач по разделам дисциплины за 1 и 2 семестры, индивидуальных для каждого студента, предназначенных для закрепления теоретических знаний и отработки практических навыков. Перед выполнением ИДЗ необходимо изучить соответствующие теоретические материалы (лекции, рекомендованная литература) и решения задач, разобранные на практических занятиях. ИДЗ выполняется в отдельной тетради. Решения выполняются ручкой с яркими синими чернилами, все чертежи выполняются карандашом с использованием линейки и, если необходимо, циркуля. Решения задач в ИДЗ следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа. ИДЗ сдается на проверку преподавателю строго в установленный срок. Самостоятельность выполнения ИДЗ проверяется на его защите у преподавателя. Оценка ИДЗ производится по пятибалльной системе оценивания

Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений и навыков по дисциплине «Вычислительная линейная алгебра» составлены в соответствии с компетенцией ОПК-2 и тематическим планом РПД. Они разделены на четыре блока, соответствующих основным разделам курса.

Блок 1. Оценка знаний (Знать) — Теоретический тест

Цель: проверка понимания источников погрешностей, условий сходимости и вычислительной сложности.

1. **Число обусловленности:** Дана матрица A . Объясните физический и вычислительный смысл числа обусловленности $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Как изменится относительная погрешность решения системы $Ax = b$ если $\text{cond}(A) = 10^6$, а относительная погрешность входных данных составляет 10^{-8} ?
2. **Устойчивость алгоритма:** почему классический метод Гаусса без выбора ведущего элемента численно неустойчив? В чем принципиальное отличие стратегии частичного выбора главного элемента (*partial pivoting*) от полного (*full pivoting*)?
3. **Сходимость итераций:** Запишите достаточное условие сходимости метода простой итерации $x^{k+1} = Bx^k + c$ через спектральный радиус матрицы перехода $\rho(B)$. Как это условие связано с диагональным преобладанием матрицы A в системе $Ax = b$?

Блок 2. Оценка умений (Уметь) — Аналитическое решение

Цель: проверка умения выбирать и применять оптимальные разложения матриц.

1. **Разреженные системы:** предложите оптимальный прямой метод (из изученных в курсе) для решения системы $Ax = b$, если матрица A является:
 - о а) Симметричной положительно определенной (СПО).
 - о б) Квадратной плотной невырожденной.
 - о в) Прямоугольной переопределенной ($m > n$) в задаче наименьших квадратов. Обоснуйте выбор, указав вычислительную сложность.
2. **Метод наименьших квадратов (МНК):** для переопределенной системы $Ax = b$ запишите нормальные уравнения. Объясните, почему решение через нормальные уравнения $A^T \cdot Ax = A^T b$ может привести к потере точности (как изменится число обусловленности). Предложите более устойчивый алгоритм через QR-разложение.
3. **Спектральные задачи:** для симметричной матрицы A с доминирующим собственным значением λ_1 опишите алгоритм степенного метода. Какую

модификацию нужно внести в алгоритм, чтобы найти собственное значение, ближайшее к заданному числу σ (сдвиг спектра)?

Блок 3. Оценка владения (Владеть) — Программная реализация (Python)

Цель: проверка навыков реализации алгоритмов, профилирования и регуляризации.

Задание 1. Реализация и сравнение решателей (ОПК-2.2, ОПК-2.3) Написать на Python функции для решения СЛАУ $A \cdot x = b$:

- Собственную реализацию LU-разложения с частичным выбором ведущего элемента (без использования `scipy.linalg.lu`).
- Обертку для метода сопряженных градиентов (CG). *Протестировать* их на матрице Гильберта размера $n=10$ и на случайной разреженной СПО-матрице размера $n=1000$.
- Построить графики зависимости нормы невязки $\|r_k\|$ от номера итерации для CG.
- Сравнить время выполнения и точность (количество верных знаков) для плотного и разреженного случая. Сделать вывод о вычислительной сложности.

Задание 2. Регуляризация и SVD (ОПК-2.1, ОПК-2.3) Дан зашумленный датасет признаков X и целевой переменной y .

1. Построить модель линейной регрессии через нормальное уравнение. Оценить число обусловленности матрицы $X^T X$.
2. Применить SVD-разложение к матрице X и вычислить псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза. Сравнить решение с пунктом 1.
3. Реализовать Ridge-регрессию (Тихоновская регуляризация). Написать функцию для подбора параметра регуляризации α с помощью кросс-валидации (скользящего контроля) по метрике MSE .
4. Визуализировать график зависимости коэффициентов регрессии от $\log(\alpha)$, демонстрирующий эффект сжатия (*shrinkage*) при увеличении штрафа.

Блок 4. Комплексное индивидуальное задание

Цель: сквозная проверка всех индикаторов компетенции ОПК-2.

Задача: «Анализ вычислительной эффективности на больших данных».

1. Загрузить реальный датасет (например, с платформы Kaggle или встроенный в `sklearn.datasets`) с числом признаков $p > 50$ и числом объектов $n > 10000$.
2. Провести стандартизацию признаков.
3. Решить задачу линейной регрессии тремя способами:

- o Через `numpy.linalg.lstq` (на базе *SVD/QR*).
 - o Через `sklearn.linear_model.Lasso` с подбором параметра α .
 - o Через собственный итерационный решатель (например, *CD* — *Coordinate Descent* или *CG* для нормальных уравнений).
4. Оценить вычислительную сложность каждого подхода (асимптотически и по времени `timeit`).
 5. Сделать вывод: какой метод предпочтительнее использовать при $n \gg p$, а какой — при очень большом p (тысячи признаков) и малом n . Обосновать выбор с точки зрения регуляризации и предотвращения переобучения.

Вопросы к зачету (4 семестр)

1. Особенности машинной арифметики стандарта IEEE 754. Машинный эпсилон. Понятия абсолютной и относительной погрешности.
2. Число обусловленности матрицы как мера чувствительности решения СЛАУ к возмущениям входных данных. Примеры плохо обусловленных матриц (матрица Гильберта).
3. Прямые методы решения СЛАУ. LU-разложение. Алгоритмическая связь с методом Гаусса. Стратегии выбора ведущего элемента (Partial и Full pivoting).
4. Разложение Холецкого для симметричных положительно определенных матриц. Условия существования и вычислительная сложность.
5. QR-разложение: метод отражений Хаусхолдера и метод вращений Гивенса. Преимущества ортогональных преобразований для численной устойчивости.
6. Решение переопределенных систем линейных уравнений (задача наименьших квадратов) с помощью QR-разложения и нормальных уравнений. Сравнение устойчивости методов.
7. Одношаговые итерационные методы (Якоби, Гаусса-Зейделя, верхней релаксации). Матричная запись и каноническая форма.
8. Достаточные условия сходимости стационарных итерационных методов. Критерий спектрального радиуса.
9. Методы подпространств Крылова. Алгоритм сопряженных градиентов (CG) для симметричных положительно определенных матриц.
10. Геометрическая и энергетическая интерпретация метода сопряженных градиентов. Свойство конечной сходимости в точной арифметике.
11. Проблема медленной сходимости для плохо обусловленных систем. Идея и методы предобуславливания (Preconditioning).

12. Примеры предобуславливателей: диагональный (Якобиевский) предобуславливатель и неполное LU-разложение (ILU).
13. Несимметричные системы уравнений. Метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) и его стабилизированные версии.
14. Проблема собственных значений. Степенной метод для поиска максимального по модулю собственного значения.
15. Обратный степенной метод со сдвигом для поиска собственных значений вблизи заданной точки.
16. QR-алгоритм для нахождения спектра матрицы. Роль предварительных преобразований (приведение к форме Хессенберга).
17. Сингулярное разложение (SVD): теорема о существовании, геометрическая интерпретация.
18. Применение SVD для низкорангового приближения матриц. Теорема Эккарта-Янга.
19. Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза и её вычисление через SVD.
20. Задача наименьших квадратов. Недостатки решения через нормальные уравнения (возведение числа обусловленности в квадрат).
21. Тихоновская регуляризация (Ridge Regression) в контексте линейной алгебры. Смещенная оценка с меньшей дисперсией.
22. Байесовская интерпретация L2-регуляризации. Влияние параметра регуляризации на норму вектора решения.
23. L1-регуляризация (Lasso) и её связь с базисным преследованием (Basis Pursuit). Эффект обнуления коэффициентов.
24. Проксимальные методы для задач с L1-штрафом (метод ISTA).
25. Источники погрешностей в численных расчетах: устранимые и неустранимые погрешности. Обратная задача анализа ошибок.
26. Устойчивость алгоритмов. Как число обусловленности влияет на выбор между прямыми и итерационными методами.
27. Вычислительная сложность основных алгоритмов: LU-разложения, QR-разложения (Хаусхолдер), одного шага метода CG.
28. Профилирование алгоритмов. Почему векторизованные операции в NumPy работают быстрее циклов на чистом Python.
29. Кросс-валидация (скользящий контроль) как метод оценки качества модели и подбора параметра регуляризации для предотвращения переобучения.

30. Применение методов вычислительной линейной алгебры в задаче сжатия данных (на примере SVD-компрессии изображений).

Тесты по компетенциям

Типовые задания для промежуточной аттестации по дисциплине

Дисциплина Б1.О.02.02 «Вычислительная линейная алгебра»
Направление подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
Профиль Анализ данных в бизнес-аналитике

№ задания	Содержание задания	Ключ к ответу	Наименование темы РПД	Семестр
ОПК-2 Способен применять современный математический аппарат, связанный с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности				
1	Как называется величина $\kappa(A)$	Спектральное число обусловленности	Введение в вычислительную линейную алгебру и анализ ошибок	4
2	Какое матричное разложение $A = LU$ является вычислительной основой классического метода Гаусса и используется для решения систем с несколькими правыми частями?	LU-разложение	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	4
3	Какое разложение $A = QR$ (где Q — ортогональная, R — верхнетреугольная матрица) является численно более устойчивой альтернативой нормальным уравнениям при решении задачи наименьших квадратов?	QR-разложение	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	4

4	Как называется итерационный метод подпространств Крылова для симметричных положительно определенных матриц, который минимизирует энергетический функционал на каждом шаге?	Метод сопряженных градиентов (CG)	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	4
5	Как называется техника ускорения сходимости итерационных методов, заключающаяся в решении эквивалентной системы $M^{-1}Ax = M^{-1}b$, где M — матрица, близкая к A ?	Предобуславливание (Preconditioning)	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	4
6	Какой алгоритм (основанный на ортогональных преобразованиях или отражениях Хаусхолдера) используется для нахождения всех собственных значений матрицы путем приведения её к (почти) верхнетреугольному виду?	QR-алгоритм	Итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений	4
7	Как называется разложение $A = U\Sigma V^T$, которое всегда существует для любой матрицы и используется для вычисления псевдообратной матрицы и низкорангового приближения?	Сингулярное разложение (SVD)	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	4
8	Как называется метод регуляризации (Ridge Regression), который добавляет штраф λ^2 к функции потерь,	Тихоновская регуляризация	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	4

	уменьшает дисперсию оценки и позволяет решать некорректно поставленные задачи с мультиколлинеарностью?			
9	Как называется матрица $A^+ A$, удовлетворяющая четырем условиям Пенроуза, которая позволяет найти решение минимальной нормы для вырожденной или переопределенной системы $Ax=b$?	Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	4
10	Как называется процедура оценки качества алгоритма (например, кросс-валидация), которую необходимо применять к модели, настроенной на обучающей выборке, для предотвращения её переобучения?	Скользкий контроль (Cross-validation)	Регуляризация и оптимизация в контексте линейной алгебры	4

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания для дисциплины «Вычислительная линейная алгебра», строятся на основе балльно-рейтинговой системы и поэтапного контроля формирования компетенции ОПК-2.

1. Текущий контроль успеваемости (формирующий)

Проводится еженедельно на практических занятиях. Направлен на отработку индикаторов ОПК-2.1 (знать) и ОПК-2.2 (уметь).

- **Экспресс-опрос (5–10 минут):** Проверка теоретических знаний в начале занятия. Студенту предлагается ответить на 1–2 вопроса по предыдущей теме (например, «Чему равно число обусловленности ортогональной матрицы?» или «Какое разложение используется для симметричных положительно определенных матриц?»).
- **Проверка псевдокода:** перед началом работы в среде Python студент сдает на проверку письменный алгоритм решения (блок-схему или пошаговый псевдокод) для текущего метода (например, алгоритм LU-разложения с выбором главного элемента). Оценивается логическая корректность и учет граничных случаев.
- **Защита лабораторной/практической работы:** Студент демонстрирует работающий код, объясняет выбор библиотечных функций (например, почему для разреженной матрицы выбран `scipy.sparse.linalg.cg`, а не `scipy.linalg.solve`) и интерпретирует графики сходимости.

2. Рубежный контроль (контрольные точки)

Проводится 2–3 раза в семестр по завершении крупных разделов. Оценивает комплексное применение знаний.

- **Типовой расчет №1 (Разделы 1–2: Ошибки и прямые методы):**
 - *Формат:* Письменная работа + скрипт.
 - *Задание:* Решить СЛАУ с матрицей Гильберта заданного порядка. В аналитической части рассчитать число обусловленности и дать прогноз точности. В программной части реализовать метод Гаусса без выбора ведущего элемента и с ним, сравнить результаты с `numpy.linalg.solve` и наглядно показать накопление ошибки округления.
- **Типовой расчет №2 (Раздел 3: Итерационные методы и спектр):**
 - *Формат:* Программный проект.
 - *Задание:* для большой разреженной матрицы (например, дискретизация уравнения Пуассона) сравнить скорость сходимости методов Якоби, Гаусса-Зейделя и Сопряженных градиентов. Реализовать простейший диагональный предобуславливатель и

показать, как он сокращает количество итераций до достижения точности 10^{-6} .

3. Промежуточная аттестация (зачет с оценкой)

Процедура оценивания на зачете интегральная и состоит из трех последовательных этапов:

Этап 1. Тестирование (20% итоговой оценки)

- *Платформа:* LMS университета или бланковое тестирование.
- *Содержание:* 15–20 вопросов закрытого типа на знание определений (число обусловленности, спектральный радиус, A-сопряженность), свойств разложений (Холецкого, QR, SVD) и вычислительной сложности алгоритмов.

Этап 2. Решение прикладной задачи (40% итоговой оценки)

- *Формат:* Работа за компьютером в среде Jupyter Notebook (30–40 минут).
- *Пример задачи:* «Дан датасет с высокой мультиколлинеарностью признаков. Загрузите данные, рассчитайте число обусловленности матрицы $X^T X$. Постройте модель Ridge-регрессии. Подберите параметр α методом скользящего контроля (кросс-валидации). Сравните вычислительное время решения через нормальные уравнения и через SVD-разложение».
- *Критерии:* Корректность кода, отсутствие "магических чисел", наличие комментариев, правильная визуализация графиков сходимости и выбора гиперпараметра.

Этап 3. Устное собеседование (40% итоговой оценки)

- Преподаватель проверяет понимание студентом результатов, полученных на Этапе 2.
- *Типовые вопросы защиты:*
 - о «Почему на ваших данных Lasso-регрессия занулила именно эти коэффициенты?»
 - о «На графике нормы невязки вашего метода CG наблюдаются выбросы. Какова их природа в конечной арифметике (потеря ортогональности)?»
 - о «Вы использовали `eigs` из `scipy.sparse`. Какую матрицу фактически строит алгоритм неявно (матрицу проекции Арнольди)?»

4. Оценивание индивидуального задания (НИРС)

Выполняется в течение семестра и защищается в конце. Объем — 8 часов СРС.

- **Процедура:** Студент загружает в репозиторий (GitHub/GitLab) Jupyter Notebook и файл с данными.

- **Критерии оценивания (100 баллов):**

- *Постановка задачи и обзор методов (15 баллов):* Обоснование выбора алгоритмов.
- *Качество реализации (35 баллов):* Использование векторизации NumPy вместо циклов, обработка исключений, профилирование кода (%timeit).
- *Анализ вычислительной эффективности (25 баллов):* Сравнение асимптотики самописного кода и библиотечных функций, графики масштабируемости.
- *Регуляризация и выводы (25 баллов):* Корректный подбор гиперпараметров, анализ переобучения, соответствие выводов требованиям индикатора ОПК-2.3 (владение регуляризацией).

5. Шкала оценивания

Итоговая оценка за зачет с оценкой выставляется по совокупности баллов:

- **Текущий контроль:** макс. 30 баллов.
- **Рубежный контроль (типовые расчеты):** макс. 30 баллов.
- **Зачетная процедура (тест + задача + собеседование):** макс. 40 баллов.
- **Бонусные баллы (посещаемость, активность):** макс. 10 баллов.

Перевод баллов в оценку:

- 86–110 баллов — «Отлично»
- 71–85 баллов — «Хорошо»
- 51–70 баллов — «Удовлетворительно»
- 0–50 баллов — «Не зачтено» (требуется пересдача)